Introduzione

Perché il titolo di questo libro è *Geometrie* e non, come forse ci si poteva aspettare, *Geometria*? Perché il titolo *Geometria* avrebbe fatto pensare a una trattazione sistematica, volta a illustrare che cos'è la geometria ma non è questo ciò che il lettore troverà nelle pagine che seguono. Pretendere infatti di rispondere alla domanda «Che cos'è la geometria?» dando conto di tutte le sue sfaccettature sarebbe davvero una pretesa eccessiva, non solo in un agile volumetto come quello che avete in mano, ma anche in un libro più corposo.

Perché allora *Geometrie*?

Perché le geometrie possibili sono davvero tante. C'è un profondo contrasto fra la varietà e la molteplicità dei punti di vista di un'osservazione geometrica sul mondo che ci circonda e la visione della geometria che si percepisce nell'immaginario collettivo; una visione ingessata, monolitica, ferma su un ventaglio di argomenti che difficilmente va oltre inutili (perché facilmente reperibili in rete) formule e una pesante nomenclatura; una visione, per di più, irrigidita da un'interpretazione del rigore che, invece di farne uno strumento di aiuto al ragionamento, ne ricava solo un effetto paralizzante.

Negli ultimi anni c'è stato un notevole aumento di iniziative di carattere divulgativo sul fronte della matematica, spesso centrate proprio sulla geometria; e così, anche in questo immaginario collettivo un po' stereotipato, hanno timidamente fatto capolino temi raramente incontrati a scuola: topologia, ipercubi, nastri di Moebius, spazi a quattro dimensioni… Tuttavia questi argomenti restano spesso inchiodati a un livello quasi «folcloristico»: nel ricordo, un nastro di Moebius tagliato a metà che non si divide in due diventa quasi uno spettacolo di magia in cui il prestigiatore usa uno dei suoi trucchi. E a volte si ha l'impressione che anche gli studenti universitari, che pure hanno incontrato questi stessi argomenti nei loro corsi, facciano poi fatica a costruire un legame fra il piano formalizzato e il «gioco del prestigiatore».

Il lettore troverà quindi in questo volume alcune *storie* di geometria: *storie* che contengono esempi significativi di problemi geometrici; *storie* che mostrano un certo modo di ragionare e di porsi di fronte ai problemi; *storie* che illustrano che cosa vuol dire pensare in termini geometrici. Si tratta di *storie* che, soprattutto, racconteranno alcuni dei collegamenti fra le diverse aree della geometria e fra la geometria e altri campi della matematica, e, anche, tra la geometria elementare, nota a tutti fin dalla scuola primaria (triangoli e quadrati, cubi e sfere, la carta a quadretti...), e le geometrie più avanzate: la geometria delle trasformazioni; la topologia, dove un cubo e una palla sono la stessa cosa; la geometria della sfera, dove non ci sono rette parallele e la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di 180°; la geometria iperbolica, dove le rette per un punto parallele a una retta fissata sono addirittura infinite e la somma degli angoli di un triangolo è minore di 180°.

Sarà un viaggio compiuto senza la pretesa di approfondire i temi trattati, ma cercando di fissare le idee su alcuni concetti chiave, e rimandando eventualmente l'interlocutore più esigente ad altre letture (fra le quali *in primis* gli approfondimenti e i contenuti integrativi a questo testo che si possono trovare in rete).

Ecco qualche indicazione più dettagliata sul percorso.

Prenderemo le mosse, nel ***Capitolo 1***, da un problema, molto classico, di geometria euclidea piana, che parte da un oggetto geometrico assolutamente *normale* come un triangolo. È impressionante constatare quanti fatti geometrici significativi, quante osservazioni, quanti legami possano «saltar fuori» da una situazione all'apparenza così standard. Dobbiamo riconoscere che questo semplice «problemino» su un triangolo apre molti fronti: ci mostra subito che cosa significa ragionare in termini geometrici; fa comparire in maniera naturale la geometria delle trasformazioni; trova la sua naturale collocazione in un ambiente che generalizza la carta a quadretti che tutti abbiamo incontrato fin dai primi giorni di scuola; e infine fa spuntare in maniera inaspettata quello che fungerà da «direttore d'orchestra» nelle diverse *storie* che racconteremo: il numero di Eulero.

Nel ***Capitolo 2*** parleremo di trasformazioni e di invarianti, vale a dire di cambiamenti e di quantità (o relazioni, o proprietà) che restano immutate in questi cambiamenti; può sembrare una contraddizione parlare di invarianti insieme alle trasformazioni; invece, se ci fermiamo un momento a pensarci, ci accorgiamo che i due concetti vanno in modo naturale di pari passo. Non è difficile trovare esempi, anche al di fuori della matematica, nei quali l'aspetto cruciale di un problema è quello di capire che cosa può cambiare e che cosa si mantiene: che cosa può cambiare senza cambiare i termini del problema ma permettendoci di esprimerlo in una forma più facile da affrontare, e che cosa si mantiene e ci può aiutare a risolverlo. Fra le trasformazioni più generali che prenderemo in considerazione, spunteranno anche le trasformazioni topologiche, quelle per cui sembra che debba cambiare tutto e si fa proprio fatica a immaginare che esista qualche invariante: si scoprirà che il numero di Eulero è un invariante perfino per queste trasformazioni.

Nel ***Capitolo 3*** incontreremo un bivio: saranno due i percorsi che il lettore avrà di fronte.

Il primo (***Capitolo 3A***) – l'ordine è del tutto casuale e il lettore potrà sceglierlo a piacimento – ha a che fare con poliedri e tassellazioni, cioè due maniere diverse di assemblare dei poligoni: una volta (nel caso delle tassellazioni) restando sul piano e un'altra volta (nel caso dei poliedri) uscendo dal piano e addentrandosi nello spazio tridimensionale; vedremo che non è così ovvio decidere che cosa vogliamo chiamare poliedro, ritroveremo il numero di Eulero e scopriremo che vale quasi sempre 2, ma scopriremo poi anche dei poliedri «strani», per i quali il numero di Eulero assume altri valori. Qui il lettore potrà ritrovare, con altre vesti, anche oggetti familiari (cubi e tetraedri, prismi e piramidi…), già incontrati nell'iter scolastico o nella vita di tutti i giorni.

Il secondo percorso (***Capitolo 3B***) ha invece a che fare con le superfici e con la topologia: incontreremo qui oggetti probabilmente meno familiari, come ciambelle (che i matematici chiamano tori) e nastri di Moebius, e anche in questo contesto, apparentemente così diverso, il numero di Eulero avrà la sua parte, anzi una parte molto significativa, perché è l'ingrediente fondamentale di un risultato assai notevole: la classificazione delle superfici.

Nel **Capitolo 4**, l'ultimo, la situazione si ricomporrà; ci sarà modo di ripensare ai percorsi fatti e di accorgersi dei ponti che collegano i due ambiti (approssimativamente) descritti. E sarà sempre il numero di Eulero a guidare questi collegamenti e a mostrare come nozioni di carattere rigido (metrico) siano, in dimensione due, strettamente legate a nozioni di carattere lasco (topologico): si può in qualche senso affermare che operazioni come misurare e deformare, che sembrano rappresentare due mondi agli antipodi, finiscano (in dimensione due!) per essere saldamente connesse, il che è davvero bizzarro! Scopriremo così che il numero di Eulero (invariante per deformazioni topologiche!) è legato all'area e alla curvatura, cioè a due nozioni di carattere metrico.

Infine, l'**Appendice** lascerà intravedere in maniera più esplicita le geometrie non euclidee (ellittica e iperbolica) che nel corso del testo sono rimaste sullo sfondo.

Un inciso: molte fra le diverse *storie* contenute in questo volume hanno avuto origine da iniziative condotte negli ultimi vent'anni sul fronte della comunicazione della matematica, in particolare da alcune mostre dirette al grande pubblico. In effetti, un contesto come quello di una mostra richiede proprio di *raccontare una storia*; e richiede anche, per questa storia, di individuare argomenti che tocchino contenuti matematici profondi e significativi, ma che insieme si prestino a un racconto (abbastanza) informale. Sono proprio questi racconti che qui sono stati legati a formare un'unica *storia*, che mette in evidenza le connessioni profonde che esistono fra settori apparentemente distanti della matematica.

I lettori a cui questo volume immagina di rivolgersi sono persone non necessariamente già in possesso di particolari strumenti matematici, ma curiose e disponibili a investire un po' di tempo e di energia sugli argomenti che proponiamo. In cambio della fatica richiesta al lettore, il nostro impegno sarà quello di sfrondare il più possibile l'esposizione da tecnicismi inutili, lasciando solo quelli strettamente indispensabili, in modo che la lettura risulti il più possibile fluida.

Come si può intuire già dalla struttura sommariamente descritta qui sopra, i percorsi di lettura possibili sono diversi e ciò dovrebbe permettere al lettore di aggirare eventuali difficoltà, magari lasciandole decantare e ritornandoci sopra dopo aver visto altre parti del libro. Le ripetizioni frequenti nel testo sono volute, soprattutto al fine di sottolineare come la stessa idea si ritrovi in contesti e situazioni diverse: ci auguriamo che possano costituire anche un aiuto alla lettura.

Prima di lasciarvi al testo, mi preme qui ringraziare Gilberto Bini per le numerose chiacchierate con cui abbiamo cominciato a porci il problema di costruire dei collegamenti tra «informale» e «formalizzato», fra la geometria delle mostre e quella delle aule universitarie, e quindi di fatto abbiamo iniziato il lavoro che trova ora una prima risposta in questo libro.

Ringrazio inoltre Gian Marco Todesco non solo per le numerose figure realizzate appositamente per questo volume, ma anche per le sempre stimolanti discussioni che originano dalle difficoltà – ogni volta diverse – connesse alla realizzazione di queste figure.

Un caloroso ringraziamento va anche a tutti coloro che, ponendomi delle domande su questi temi, nei contesti più svariati, hanno contribuito, magari inconsapevolmente, alla costruzione di questo materiale; non solo perché dai tentativi di risposta ai loro quesiti spesso sono nati nuovi esempi o nuove maniere di comunicare un concetto un po' ostico, ma soprattutto perché il loro entusiasmo e la loro curiosità hanno tenuto sempre alta la voglia di continuare in questo lavoro. L'elenco è lungo e non mi permette di nominare tutti (anche limitandomi a coloro di cui conosco il nome), ma, una per tutti, mi fa piacere qui ringraziare Alessia Uslenghi, editor di questo libro, che, con la sua necessità di capire tutto e le sue richieste di chiarimenti, ha contribuito non poco a «sciogliere» alcuni dei punti più critici.